

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор



В.А. Дубровина

«31» марта 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»**

---

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Магистерская программа	Математика
Форма обучения	очная

Рабочая программа адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2023

Рабочая программа дисциплины «Функциональные уравнения» для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика, магистерской программы «Математика», составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для очной формы обучения в 2023 г.

Разработчик:

заведующий кафедрой математического анализа и  
дифференциальных уравнений

доктор физ.-мат. наук, профессор



В.В. Волчков

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры математического анализа  
и дифференциальных уравнений

Протокол от 31.03.2023 г. № 10а

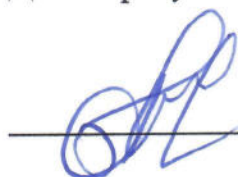
Заведующий кафедрой



В.В. Волчков

## СОГЛАСОВАНО

Декан факультета математики и информационных технологий



И.А. Моисеенко

31 марта 2023 г.

## СОГЛАСОВАНО

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий (Протокол от 31.03.2023 г. № 3)

Председатель



Л. И. Селякова

31 марта 2023 г.

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Функциональные уравнения» включена в часть, формируемую участниками образовательных отношений, учебного плана.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания и умения, формируемые предшествующими дисциплинами – «Математический анализ», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Теория меры и интеграла». Знания и умения, полученные в ходе изучения дисциплины «Функциональные уравнения» являются основой для изучения последующих дисциплин: «Методика преподавания математических дисциплин в ВУЗе», учебная практика, производственная практика, преддипломная практика, используются при подготовке выпускной квалификационной работы.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

<i>Наименование показателя</i>	<i>Характеристика дисциплины</i>	
Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика	
Направление подготовки	01.04.01 Математика	
Программа высшего образования	магистратура	
Магистерская программа	Математика	
Дисциплина базовой/вариативной части образовательной программы	Вариативная часть, формируемая участниками образовательных отношений	
	очная форма обучения	Заочная форма обучения
Количество зачетных единиц	4	
Общее количество часов	144	
Год подготовки	2	
Семестр	3	
Количество содержательных модулей	1	
Недельное количество часов для очной формы обучения:		
аудиторных	4	
лекционных	1	
практических, семинарских	3	
лабораторных		
самостоятельной работы	4	
индивидуальные задания		
Форма промежуточной аттестации	экзамен	

## 3. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель дисциплины:** углубленное изучение дополнительных глав математического анализа, посвященных методам решения функциональных уравнений и их приложениям, подготовка студентов к работе над выпускной квалификационной работой.

**Задачи дисциплины:** усвоение теоретических основ и практических

навыков использования функциональных уравнений при решении теоретических и прикладных задач.

#### 4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

В результате освоения изучения дисциплины у обучающегося должны быть сформированы компетенции:

<b>Общепрофессиональные компетенции (ОПК):</b>	
ОПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики
ОПК-2	Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении
ОПК-3	Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности

Достижение компетенций оценивается на основе индикаторов и соответствующих им результатов обучения.

**Индикаторы достижения компетенций и результаты обучения.**  
Достижение компетенций оценивается на основе таких индикаторов и соответствующих им результатов обучения

Общепрофессиональные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1. М-1. Работает с профессиональной литературой по анализу и теории функций	Знает литературные источники, включая электронные ресурсы
		Знает последовательность организации процесса исследования
		Умеет осуществлять поиск литературных источников
		Умеет производить поиск необходимой информации
		Умеет анализировать и обрабатывать полученную информацию
		Умеет составлять конспект, готовить доклад по найденной в литературе информации
	ОПК-1. М-2. Выполняет стандартные действия, решает типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках дисциплины	Знает определения и теоремы из курса «Функциональные уравнения»
		Знает свойства аддитивных и близких к ним классов функций
		Знает важнейшие методы решения функциональных уравнений
		Умеет применять функциональные уравнения для решения задач из других разделов математики
		Умеет сводить различные математические задачи к функциональным уравнениям

ОПК-2. Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2. М-1. Использует методы построения и анализа математических моделей в задачах естествознания, технике, экономике и управлении	Знает примеры основных математических моделей
		Знает методы построения и анализа математических моделей
		Умеет анализировать ситуацию, сравнивать различные математические модели
		Умеет строить и анализировать математическую модель
		Знает свойства основных математических моделей
	ОПК-2. М-2. Демонстрирует умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности	Знает принципы построения и анализа математических моделей
		Умеет анализировать ситуацию, осуществлять аргументированный выбор подходящей математической модели
		Умеет строить и анализировать математическую модель
		Умеет применять на практике математические модели и компьютерные технологии
		Знает принципы построения и анализа математических моделей
ОПК-3. Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности	ОПК-3. М-1. Планирует и осуществляет учебный процесс с применением информационных технологий	Знает общие подходы к изложению материала
		Знает технологии оформления текста, в том числе математического
		Знает принципы подготовки презентаций
		Умеет применять технические средства и компьютерные программы, помогающие осуществлять педагогическую деятельность
		Умеет преподавать новый материал, организовывать повторение и закрепление материала
	ОПК-3. М-2. Разрабатывает варианты заданий и осуществляет проверку работ	Знает подходы к определению уровня сложности задания
		Знает технические средства для создания карточек письменных работ
		Умеет создавать несколько заданий одного типа
		Умеет получать техническими средствами промежуточные ответы при решении стандартных заданий
		Умеет осуществлять проверку и оценку работ

## 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Темы	Вопросы темы
1. Уравнение Коши.	1.1. Аксиома выбора и лемма Цорна. 1.2. Линейные пространства. 1.3. Базис Гамеля. 1.4. Решение уравнения Коши в классе непрерывных функций. 1.5. Решение уравнения Коши в классе монотонных функций. 1.6. Решение уравнения Коши в классе дифференцируемых функций. 1.7. Решение уравнения Коши в классе локально ограниченных функций.

Темы	Вопросы темы
2. Другие функциональные уравнения	2.1. Уравнения без свободных переменных. 2.2. Уравнения со свободными переменными. 2.3. Уравнение типа Коши для экспоненты. 2.4. Уравнение типа Коши для логарифма. 2.5. Уравнение типа Коши для степенной функции. 2.6. Функциональные уравнения для тригонометрических функций. 2.7. Фракталы. 2.8. Лестница Кантора. 2.9. Функция Ван дер Вардена.

## 6. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Названия содержательных модулей и тем	Количество часов							
	Очная форма обучения				Заочная форма обучения			
	Всего	В т.ч.			Всего	В т.ч.		
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа		Лекции	Практические	Самостоятельная работа
1. Уравнение Коши.	64	8	24	32				
2. Другие функциональные уравнения	80	10	30	40				
<b>Всего часов</b>	<b>144</b>	<b>18</b>	<b>54</b>	<b>72</b>				

## 7. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Самостоятельная работа имеет особенное значение для креативного (творческого) усвоения основных понятий и категорий основы научной работы обучающихся. Самостоятельная работа обучающегося является важной формой учебного процесса, которая позволяет приобрести, а также закрепить новые знания, навыки и умения, сформировать личные убеждения, использовать полученные знания и умения в практической деятельности. Она осуществляется на протяжении всего процесса обучения и имеет следующие стадии:

1. Первичное ознакомление с теоретическим материалом и составление конспекта;
2. Изучение и усвоение теоретического материала;
3. Самостоятельная проработка литературных источников и обобщение изученного материала;
4. Подготовка к практическим (лабораторным) занятиям;
5. Выполнение практических заданий;
6. Индивидуальная работа по заданию преподавателя.

Контрольными формами самостоятельной работы по дисциплине могут быть следующие: работа с литературными первоисточниками по темам дисциплины; выполнение практических заданий, подготовка докладов, тезисов, научных статей.

## **8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ МОДУЛЬ 1.**

1. Функциональное уравнение.
2. Аксиома выбора.
3. Частично упорядоченное множество.
4. Линейно упорядоченное множество.
5. Цепь.
6. Верхняя грань.
7. Ограниченное подмножество.
8. Максимальный элемент.
9. Наибольший элемент.
10. Лемма Цорна.
11. Уравнение Коши.
12. Линейное пространство.
13. Базис Гамеля.
14. Непрерывные функции.
15. Монотонные функции.
16. Дифференцируемые функции.
17. Локально ограниченные функции.
18. Функциональное уравнение без свободных переменных.
19. Функциональное уравнение со свободными переменными.
20. Лестница Кантора.
21. Функция Ван дер Вардена.

## **9. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

Оценочные средства детализируются по видам работ в оценочных материалах по дисциплине, которые утверждаются на заседании кафедры.

### **Система оценивания по дисциплине по очной форме обучения\***

Форма контроля	Максимальное количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль:		
практическая работа (тема 1)	50	50
практическая работа (тема 2)		50
Промежуточная аттестация	экзамен	
<b>Итого за семестр</b>	<b>100</b>	

\* в соответствии с утвержденными оценочными материалами по дисциплине



## 10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале согласно таким критериям, приведенным в таблице ниже. Организационно-учебная работа обучающегося в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (вопросы лектору по теме лекционного материала, участие в обсуждении пройденного материала, решение задач и ситуаций у доски и т.п.).

Содержательные модули	Вид работы	Баллы
Содержательный модуль 1	Организационно-учебная работа обучающегося в семестре	10
	Самостоятельная работа	20
	Модульная контрольная работа	30
	<b>Итого</b>	<b>60</b>
<b>Экзамен</b>		<b>40</b>
<b>Общий итог</b>		<b>100</b>

### Порядок оценивания учебных достижений обучающихся

Оценка по шкале ECTS	Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по пятибалльной шкале	
		экзамен, дифференцированный зачет	зачет
A	90-100	5 (отлично)	зачтено
B	80-89	4 (хорошо)	зачтено
C	75-79	4 (хорошо)	зачтено
D	70-74	3 (удовлетворительно)	зачтено
E	60-69	3 (удовлетворительно)	зачтено
FX	35-59	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной аттестации	не зачтено
F	0-34	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи при условии обязательного набора дополнительных баллов	не зачтено

## 11. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

1) для слепых и слабовидящих:

– лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;



- для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;

- письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.

2) для глухих и слабослышащих:

- лекции оформляются в виде электронного документа;
- письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
- экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
- письменные задания выполняются на компьютере;
- экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

1) для слепых и слабовидящих:

- в печатной форме увеличенным шрифтом;
- в форме электронного документа;

2) для глухих и слабослышащих:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

## **12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя. Выход в Интернет проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных

библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

### 13. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### Основная литература

1. Бродский, Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. - Киев: Вища шк., 1983. - 96 с.
2. Л.М. Лихтарников Элементарное введение в функциональные уравнения. - СПб, Лань, 1997 - 160с.

#### Дополнительная литература

3. Ацель Я. Некоторые общие методы теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений / Я.Ацель // Успехи математических наук. – 1956. – Т. 11:3(69), с. 3-68.

### 14. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. Научная электронная библиотека elibrary.ru :информ.-аналит. портал / ООО Научная электронная библиотека. – Москва : ООО Науч. электрон. б-ка, сор. 2000–2022. – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.01.2023). – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.
2. Электронный каталог Научной библиотеки Донецкого государственного университета. – Донецк: НБ ДонГУ, 1999– . – URL: <http://catalog.donnu.education> (дата обращения: 01.01.2023). – Текст : электронный;
3. Учебники и другие книги по математике URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный
4. Интернет-библиотека Виталия Арнольда URL: <http://ilib.mccme.ru/> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный;
5. Техническая библиотека URL: <http://techlibrary.ru/> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный;
6. Научные журналы ФГБОУ ВО «ДонГУ» URL: <http://donnu.ru/science/journals> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

### **15. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

1. Windows7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. MicrosoftOffice (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. MicrosoftVisualStudio (лицензия программы DreamSpark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, AdobeAcrobatReader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSDдля свободного программного обеспечения).